

Mouvements chaotiques, étude du pendule double

Jérôme Dequeker - Paul-Henri Michel

Table des matières

1	Partie théorique	4
1.1	Approche historique	4
1.1.1	Henri Poincaré, les systèmes à N corps	4
1.1.2	Édouard Lorenz, le chaos en météorologie	5
1.1.3	Le chaos par l'exemple	5
1.2	Le chaos	8
1.2.1	Définitions	8
1.2.2	Déterminisme et stochastique	8
1.2.3	Le chaos entre déterminisme et imprévisibilité	9
1.2.4	Bifurcation vers le chaos	9
1.2.5	Représentation théorique de l'attracteur de Lorenz	11
2	Partie calculs	14
2.1	Pendule Double	14
2.1.1	Coordonnées des points	14
2.1.2	La vitesse v_1	14
2.1.3	La vitesse v_2	14
2.1.4	Lagrangien	15
2.1.5	Calcul de I_z et de $I_{z'}$	15
2.1.6	Appliquons le théorème de Huygens	16
2.1.7	Retour au Lagrangien	17
3	Partie pratique	19
3.1	Le montage	19
3.2	Traitement des données	19
3.2.1	Méthode d'acquisition informatique des données	19
3.2.2	Calcul des angles, et leurs dérivées	20
3.3	Démarche expérimentale	20
3.3.1	Cas de petites oscillations - Petits angles	21
3.3.2	Grandes oscillations - Mouvement turbulent	24
4	Journal de bord	28
4.1	Vendredi 4 Février 2011	28
4.2	Vendredi 11 Février 2011	28
4.3	Vendredi 18 Février 2011	28
4.4	Vendredi 11 Mars 2011	28
4.5	Vendredi 18 Mars 2011	28
4.6	Vendredi 25 Mars 2011	28
4.7	Vendredi 1 Avril	28
4.8	Vendredi 8 Avril	28
4.9	Vendredi 15 Avril	29

5	Conclusion	29
6	Remerciements	29
7	Bibliographie	29

1 Partie théorique

Le chaos est incontestablement devenu un domaine à part entière dans la physique des systèmes non-linéaires. Avant tout une théorie mathématique, le chaos relève rapidement une importance capitale dans des systèmes réels simples (comme l'interaction gravitationnelle à 3 corps, par exemple). Notre but n'est pas de donner une étude approfondie sur le chaos, nous n'en avons pas les moyens à notre niveau, mais il est de présenter cette théorie par le biais d'un système physique simple : le pendule double. Le pendule double que nous avons choisi est un pendule de type solide avec des barres homogènes en métal, les rotations mutuelles se feront grâce à la jonction de roulements à billes pour minimiser les frottements. Notre but est tout d'abord d'essayer de visualiser la sensibilité aux conditions initiales de notre pendule double puis d'essayer d'en extraire les caractéristiques sur le chaos. Dans quelle mesure le pendule double est un bon exemple de turbulence? Le pendule double est-il vraiment chaotique? Il convient premièrement de donner quelques définitions et quelques points fondamentaux sur la théorie du chaos. Ensuite nous porterons une grande partie sur l'étude expérimentale : montage, utilisation du logiciel généré pour le traitement de la vidéo et tracé des résultats avec le langage python. Nous analyserons différentes conditions initiales et leurs effets sur le mouvement de l'oscillateur. La partie théorique nous permettra d'éclairer nos conclusions expérimentales, car nous verrons qu'il n'est pas aisé de décrire le chaos par de simples représentations d'évolution temporelle. En effet l'apparition du chaos réside en la juxtaposition de certaines conditions nécessaires. Ce n'est pas parce que le pendule oscille différemment pour un point de départ infiniment différent que l'on peut dire qu'il est chaotique.

1.1 Approche historique

1.1.1 Henri Poincaré, les systèmes à N corps

Contrairement à ce que l'on peut croire, le chaos traite de phénomènes déterministes, dans le cadre de phénomènes hautement sensibles aux conditions initiales, on parle alors de non-prédictibilité sur le long terme. Nous reviendrons en détail sur ce point.

Avant la théorie du chaos, qui prend ses racines dans les mathématiques, des physiciens à la fin du 19^e siècle, début du 20^e siècle avaient observé la sensibilité de certains systèmes physiques aux conditions initiales. Le point de départ se situe plus particulièrement sur les problèmes à 3 corps, par exemple dans l'étude de l'interaction gravitationnelle entre 3 objets célestes. Laplace tenta de résoudre le problème en faisant appel à la théorie des perturbations¹ au premier ordre. Cette méthode ne permit pas la résolution du problème non-linéaire. Poincaré, à la fin du 19^e siècle, dans « Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique », montre que malgré la véracité du théo-

1. Théorie des perturbations : Consiste en la résolution d'une équation lorsque la solution générale est connue exactement, ainsi les solutions particulières peuvent être approximées par variations, perturbations de conditions initiales.

rème de Cauchy-Lipschitz², l'évolution à long terme et l'absence de données précises sur les conditions impliquent souvent une prédiction impossible.

Lyapounov, physicien russe, travaille sur cette instabilité apparente du mouvement, il donne une approche plus quantitative, basée sur une variation exponentielle entre deux mouvements aux conditions initiales très proches. Le facteur dans l'exponentielle, selon son signe, décrit un système stable ou instable.

1.1.2 Édouard Lorenz, le chaos en météorologie

Édouard Lorenz, météorologue américain, mit en évidence la grande sensibilité aux conditions initiales des phénomènes météorologiques. Mathématiquement, le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides. Autant dire qu'elles ne sont pas intégrables directement, il y a un grand nombre de degrés de liberté et elles sont non-linéaires. Cette turbulence dans les résultats a été observée suite à un problème informatique, en effet, Lorenz avait l'habitude de faire ses calculs sur des données météorologiques très précises. Un jour, il configura les paramètres avec moins de décimales, le résultat fut étonnant : les prévisions étaient bouleversées. On connaît très bien cette vision du chaos par la célèbre formule : « Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil provoque-t-il une tornade au Texas ? ». Lorenz précise bien, que si les ailes du papillon peuvent déclencher une tornade, d'innombrables autres battements peuvent l'en empêcher . . . C'est l'immensité des variables liées entre elles qui expliquent que ce phénomène peut se produire, étant donné la sensibilité aux conditions initiales. Chaos rime donc avec système complexe, différentiel, avec un certain nombre de degrés de libertés, nous verrons cependant qu'avec peu de degrés de libertés, sur des variables couplées entre elles, on peut observer des phénomènes chaotiques. Lorenz montra que les équations de Newton, de la mécanique des fluides dans le cas du système météorologique, peuvent se réduire à un système scalaire à 3 degrés de libertés. Rapporté dans l'espace des phases (cf partie 1.2.1), on étudiera l'attracteur étrange, portrait de phase caractéristique de systèmes chaotiques. Nous verrons pourquoi ces attracteurs sont qualifiés d'étranges.

1.1.3 Le chaos par l'exemple

Avant d'entamer une étude plus détaillée sur le chaos, ses caractéristiques et ses implications dans la physique. Nous allons vous présenter quelques exemples de phénomènes chaotiques. Chaos ne rime pas avec systèmes complexes, loin de là. Un avion est un système particulièrement complexe (structure à grands degrés de liberté, mécanique de systèmes déformables . . .) mais fort heureusement l'avion possède une grande stabilité durant le vol . . .

2. Théoreme de Cauchy-Lipschitz : Assure l'existence d'une solution à une équation donnée pour chaque paramètre pris. C'est donc un principe déterministe mais cependant la capacité de prédiction n'est pas acquise comme le montrent les phénomènes chaotiques.

La boule de billard De nombreux système physiques plus simples se meuvent de manière chaotique, on peut prendre l'exemple de la boule de billard qui rebondit plusieurs fois sur une surface à la géométrie complexe, sa trajectoire est entièrement déterminée mais à chaque lancé, la boule observe un déphasage de plus en plus important vis à vis de certaines trajectoires.

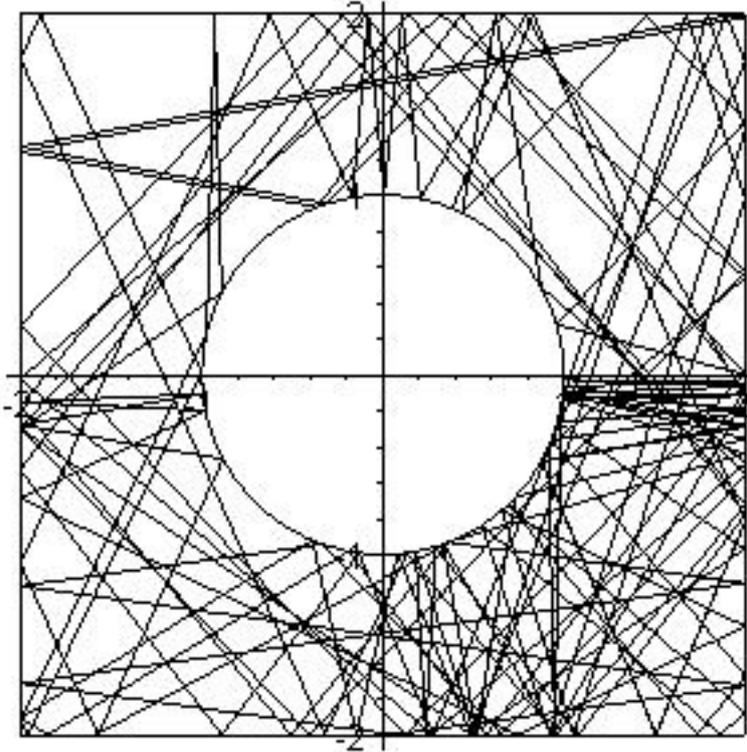


FIGURE 1 – La boule de billard

Sur cette image, la boule de billard rebondit soit sur une surface circulaire, soit sur une surface plane, son mouvement est désordonné, sur le long terme elle peut décrire tous les espaces possibles.

La suite logistique Un autre exemple intéressant est celui des fractales³, en effet c'est un très bel aperçu de la notion d'attracteur. $x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$

Selon les valeurs initiales la suite peut converger, être soumise à des oscillations ou bien avoir un caractère chaotique (μ réel, x_n réelle). Ici nous voyons clairement que petite variation initiale implique grands changements sur le long terme, malgré la loi

3. Fractales :On nomme figure fractale, une courbe ou surface de forme irrégulière ou morcelée qui se crée en suivant des règles déterministes ou stochastiques impliquant une homothétie interne. Selon les théories de Mandelbrot sur les fractales, ce genre d'objet mathématique est invariant par changement d'échelle d'observation.

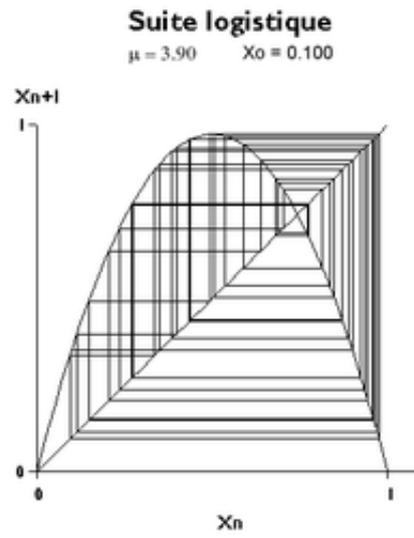


FIGURE 2 – $X_0 = 0.100$

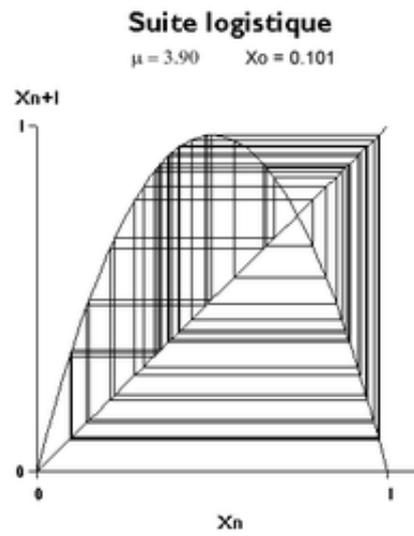


FIGURE 3 – $X_0 = 0.101$

déterministe régissant cette suite. Attention, dans le cas de notre pendule double, ou du système de Lorenz, même en chaotique, le diagramme de phase présente une allure invariante, dont les droites ne se coupent, le chaos reste déterministe.

1.2 Le chaos

1.2.1 Définitions

Espace des phases : l'espace des phases en mécanique analytique est un espace à $2M$ dimensions permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système mécanique décrit par des équations différentielles du second ordre par rapport au temps. Il est étroitement associé aux équations de Hamilton et donc au formalisme Hamiltonien. Généralement on travaille sur des paires de variables position-vitesse, conjuguées une à une, sur un degré de liberté fixé. Les $2M$ dimensions correspondent aux M paires de variables conjuguées intervenant dans les équations différentielles gouvernant le mouvement d'un système mécanique. Cet espace permet de décrire complètement la nature de l'évolution d'un système physique, qu'il soit mécanique, thermodynamique . . . En théorie du chaos, l'espace des phases permet de visualiser que les trajectoires de systèmes non-linéaires avec différentes conditions initiales se retrouvent parfois proches de certaines formes géométriques dans cet espace. On parle alors d'attracteur étrange. On appelle parfois l'ensemble des trajectoires dans cet espace.

Degré de liberté : un degré de liberté est une variable représentant la capacité qu'à un système à évoluer spontanément. Cette notion fait appel à des statistiques, les degrés de liberté doivent être dénombrables et doivent correspondre à des variables indépendantes.

Attracteurs et attracteurs étranges : Il convient tout d'abord de définir la notion d'attracteur dans l'espace des phases. Un attracteur est un ensemble ou un espace vers lequel tout système physique dissipatif converge. Cependant, les systèmes idéaux possèdent aussi un attracteur, qui sera le plus souvent qualifié de cercle-limite. Elle fait donc appel à une étude en régime asymptotique. On distingue quatre principaux types d'attracteur :

- Le point fixe ou encore point attracteur : il caractérise simplement un système atteignant un état d'équilibre.
- Le cercle - limite : Il caractérise un système atteignant un état répétitif. Fait donc appel à des systèmes périodiques. Par exemple un cerceau qui tourne indéfiniment.
- Attracteurs toriques : (dimension >2) représente dans l'espace des phases, les trajectoires de deux oscillations ou plus, indépendantes.
- Attracteur étrange : attracteur découvert en corrélation avec la théorie du chaos. En effet, les systèmes chaotiques contrairement à ce qu'on pourrait croire, possède un domaine de convergence dans l'espace des phases. Contrairement à l'attracteur torique, l'attracteur étrange résulte d'une distribution continue de modes d'oscillations. Nous allons étudier en détail au paragraphe suivant.

1.2.2 Déterminisme et stochastique

Un système dynamique, est dit déterministe si indépendamment des conditions initiales, on peut prédire l'évolution du système. On peut prendre l'exemple du tir d'une fusée dans un champ de gravitation régulier, c'est l'expérience qui nous le prouve, il est évident qu'on peut déterminer exactement l'évolution de l'engin. Nous tenterons de définir le chaos a priori de toute expérience pour en avoir une vision plus fondamentale.

Un système est dit à évolution stochastique si une cause ne produit pas forcément le même effet. En ce sens cette définition formelle implique qu'un événement est dit stochastique si il répond au pur hasard. On considère par hasard, le sens pur du terme, qui n'est dicté par aucune loi, qui suit une évolution purement imprévisible. Sur ce point on peut utiliser la définition que nous donne Aristote du hasard « le hasard ne peut provenir que du hasard ». Le mouvement Brownien est un bel exemple d'une évolution avec une apparence chaotique. Il s'en suit deux conséquences possibles :

- soit il n'y a que du hasard ...
- soit le hasard n'existe pas et est juste à prendre comme une fausse vision que nous percevons, du fait du manque de précision, du manque de données auxquelles on a accès.

Assurément nous retiendrons la deuxième proposition. On peut très bien se demander si dans le cas du mouvement Brownien, c'est le manque d'informations qui nous donnent un autre aperçu du réel. C'est de ce point de vue que le chaos est à analyser.

1.2.3 Le chaos entre déterminisme et imprévisibilité

En effet la turbulence n'est pas un phénomène stochastique. Quelles sont donc les différences à faire entre chaos et hasard ? Quelles en sont les frontières ? Le point fondateur qui permet de répondre à cette question est la notion de bifurcation vers le chaos.

Un système est chaotique si :

- il est décrit par des équations déterministes liées par des opérateurs non-linéaires
- il est irréversible malgré de possibles récurrences dites « récurrences de Poincaré »
- il est décrit par un attracteur étrange dans l'espace des phases

Exemple : évolution du système à trois corps, étudié initialement par Poincaré. Certes à des faibles échelles, des effets non-linéaires sont négligeables (causes de l'irréversibilité) et donc les mouvements sont bien décrits. Le chaos n'est donc pas stochastique, n'est pas purement déterministe mais est le siège d'équations déterministes appuyés d'opérateurs non-linéaires. Une conséquence est que le spectre de Fourier d'un système chaotique est continu, il présente une « infinité » de modes de vibration. Cependant, cela n'en fait pas une preuve, car il existe des systèmes non-chaotiques mais possédant un spectre large. Une chose à retenir est que, quelque soit le nombre de degrés de liberté, un système linéaire NE PEUT PAS être chaotique ; par exemple, une corde possède une « infinité » de ressorts couplés, pourtant son mouvement à grande échelle est connu.

1.2.4 Bifurcation vers le chaos

On a donc des conditions sur l'apparition du chaos, mais ces conditions ne permettent pas de donner une liste exhaustive de tous les systèmes chaotiques. C'est en ce sens qu'il est nécessaire de parler du lien qui existe entre un système non-turbulent et un système turbulent. Exemple : Pour cela on peut reprendre l'exemple de la suite logistique. Une étude plus approfondie montre que pour certaines valeurs, le système peut bifurquer vers le chaos. Ici il ne s'agit donc plus de conditions initiales différentes en somme, mais quand r varie on change complètement le système. C'est donc une autre information

importante à prendre en considération, le chaos ne s'obtient pas facilement, il faut un système bien particulier, mais comme nous le rappelons, ce dernier n'est pas forcément complexe.

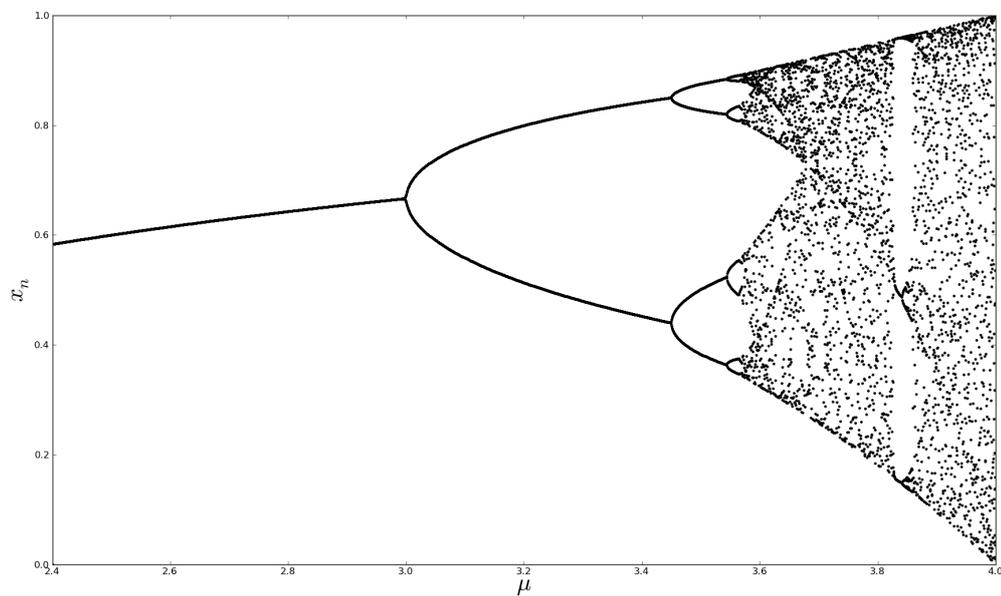


FIGURE 4 – Diagramme de plusieurs suites logistiques

1.2.5 Représentation théorique de l'attracteur de Lorenz

En 1963, Lorenz publiait ses premiers travaux sur le calcul d'instabilités et de systèmes chaotiques. Il étudia tout particulièrement un système obtenu à l'aide des équations de Navier-Stockes et qui porte aujourd'hui son nom : le système de Lorenz. A l'époque, les calculateurs n'étaient pas très puissants, Pour résoudre son système, Lorenz n'avait pu simuler que 500 itérations. Ainsi, seules quelques boucles de trajectoire avaient pu être décrites. Aujourd'hui, la puissance des calculateurs est telle que n'importe quel ordinateur personnel est capable de calculer des milliers d'itérations instantanément (ou presque). Nous nous attacherons directement au système sans détailler les simplifications et calculs préalables. Cependant, ce système est obtenu à partir des équations de Navier-Stockes écrites pour un incompressible, dotée de l'approximation de Boussinesq⁴. Nous obtenons alors le système de Lorenz suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Pr(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = ry - bz \end{cases}$$

Nous avons réalisé une modélisation de ces équations en python (langage de programmation) grâce aux modules Scipy, Matplotlib, et Numpy. Le but de cette simulation est de montrer que pour des changements d'évolution dans le temps flagrants, le système converge vers ce même attracteur, attracteur étrange dit de Lorenz. Sur les deux simulations les coefficients réels, Pr ; r et b sont fixés. Vous observerez que les conditions initiales sur x et sur y ont été modifiées de 0,1% pour une trajectoire complètement changée.

On obtient pour ces deux trajectoires une figure dans l'espace des phases, qui est l'attracteur étrange. Le système malgré son infinité de modes de vibrations possède deux modes particuliers de trajectoires à long terme, non-périodiques.

Précisons que l'attracteur étrange n'est pas l'unique type d'attracteur possible pour ce système chaotique. On peut avoir des attracteurs fixes. Tous les graphiques ont été tracés pas nos propres programmes, réalisés en Python avec le module Scipy.

4. Approximations de boussinesq : Approximations en mécanique des fluides permettant de dire que pour une température donné, et pour des dimensions horizontales beaucoup plus grandes que celles verticales, la masse volumique est une constante.

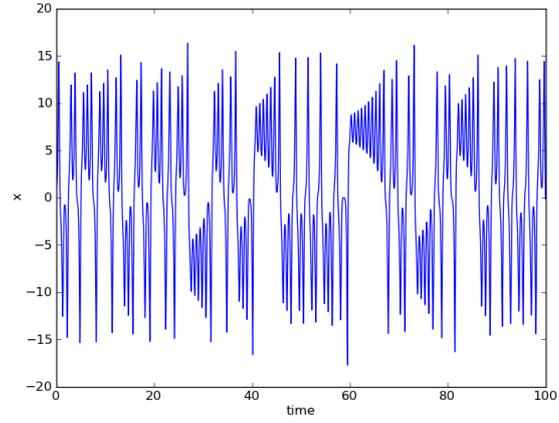


FIGURE 5 – Évolution de la modélisation dans le temps pour $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ et $z(0) = 20$

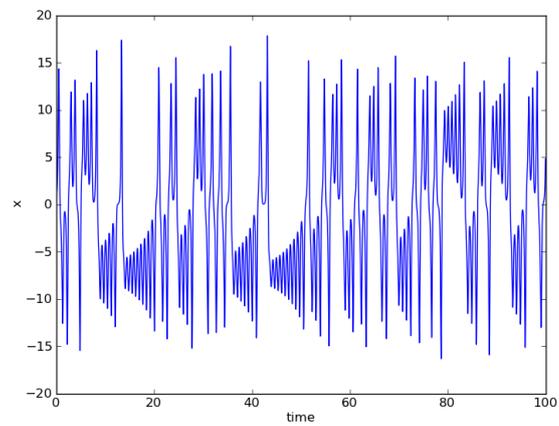


FIGURE 6 – Évolution de la modélisation dans le temps pour $x(0) = 1,001$, $y(0) = 1,001$ et $z(0) = 20$

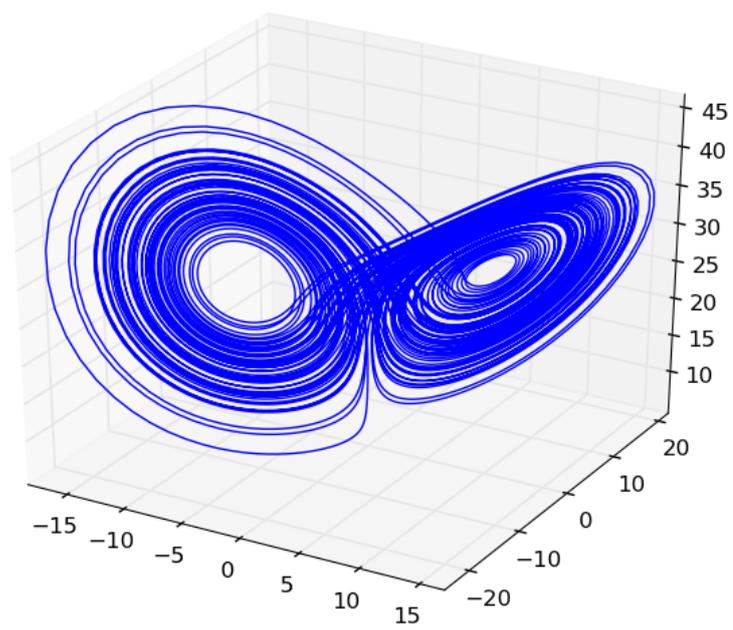


FIGURE 7 – Attracteur de Lorenz - Espace des phases x-y-z

2 Partie calculs

2.1 Pendule Double

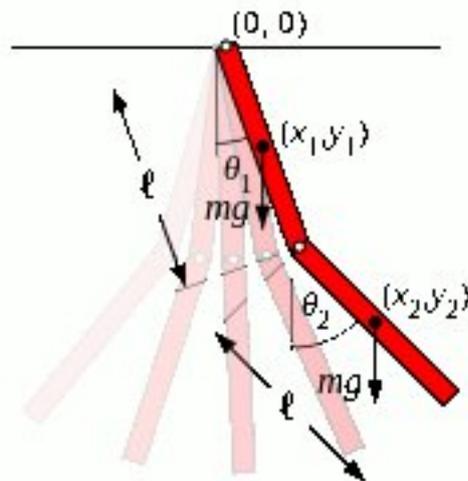


FIGURE 8 – Un pendule double

2.1.1 Coordonnées des points

On a :

$$A_1 \left(\frac{1}{2}l \sin \theta_1, -\frac{1}{2}l \cos \theta_1 \right)$$

$$B_1 \left(l(\sin \theta_1 + \frac{1}{2} \sin \theta_2), -l(\cos \theta_1 + \frac{1}{2} \cos \theta_2) \right)$$

2.1.2 La vitesse v_1

$$v_1 : \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}l \sin \theta_1 \\ -\frac{1}{2}l \cos \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}l\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \frac{1}{2}l\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix}$$

Or, $\vec{v}_1 = v_{1,x}\vec{u}_x + v_{1,y}\vec{u}_y$. D'où $|\vec{v}_1| = \sqrt{v_{1,x}^2 + v_{1,y}^2}$

2.1.3 La vitesse v_2

$$v_2 : \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} l(\sin \theta_1 + \frac{1}{2} \sin \theta_2) \\ -l(\cos \theta_1 + \frac{1}{2} \cos \theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \\ -l(-\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - \frac{1}{2}\dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \\ l(\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \end{pmatrix}$$

2.1.4 Lagrangien

$$\mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I_{z'}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mg(y_1 + y_2)$$

D'après le théorème de *König* :

$$E_c = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}\vec{L}_i \cdot \vec{\omega} \right)$$

2.1.5 Calcul de I_z et de $I_{z'}$

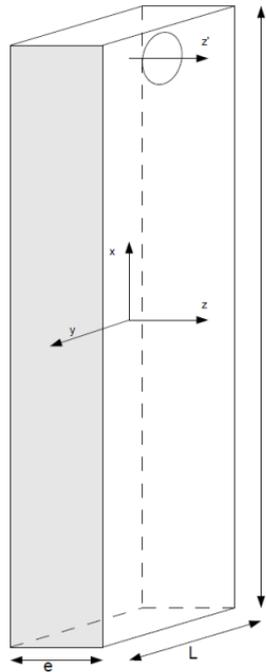


FIGURE 9 – Schéma d'une barre du pendule

$$\begin{aligned} I_z &= \rho \iiint (x^2 + y^2) dV = \rho \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho \int_{z=-\frac{e}{2}}^{z=\frac{e}{2}} \int_{y=-\frac{L}{2}}^{y=\frac{L}{2}} \int_{x=-\frac{l}{2}}^{x=\frac{l}{2}} (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \rho \int_{z=-\frac{e}{2}}^{z=\frac{e}{2}} \int_{y=-\frac{L}{2}}^{y=\frac{L}{2}} \left[\frac{1}{3}x^3 + xy^2 \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dy dz = \rho \iint \left(\frac{l^3}{12} + ly^2 \right) dy dz = \rho \int_{z=-\frac{e}{2}}^{z=\frac{e}{2}} \left[\frac{l^3}{12}y + \frac{1}{3}y^3l \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \end{aligned}$$

$$= \rho \int_{z=-\frac{e}{2}}^{z=\frac{e}{2}} \left(\frac{l^3 L}{12} + \frac{1}{3} l \frac{L^3}{4} \right) dz = \rho \left[\frac{l^3 L}{12} z + \frac{1}{3} l \frac{L^3}{4} z \right]_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} = \rho \left(\frac{l^3 L}{12} e + \frac{1}{3} l \frac{L^3}{4} e \right) = \rho e \frac{1}{12} (l^3 L + l L^3)$$

Or, $m = \rho e L l$

d'où $I_z = \frac{m}{12} (l^2 + L^2)$

2.1.6 Appliquons le théorème de Huygens

$$I_{z'} = \frac{m}{12} (l^2 + L^2) + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{m}{12} l^2 + \frac{m}{12} L^2 + \frac{m}{4} l^2$$

$$I_{z'} = \frac{m}{12} L^2 + \frac{m}{3} l^2$$

2.1.7 Retour au Lagrangien

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I_{z'} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mg(y_1 + y_2) \\
&= \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{1}{2}l\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \right)^2 + \left(\frac{1}{2}l\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \right)^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2}m \left[\left(l \left(\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \right) \right)^2 + \left(l \left(\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \right) \right)^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2}I_{z'} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mg(y_1 + y_2) \\
&= \frac{1}{2}m \left[\frac{1}{4}l^2\dot{\theta}_1^2 (\cos^2 \theta_1) + \frac{1}{4}l^2\dot{\theta}_1^2 (\sin^2 \theta_1) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2}m \left[l^2 \left(\dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + \frac{1}{4}\dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right) \right. \\
&\quad \left. + l^2 \left(\dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 + \frac{1}{4}\dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2}I_{z'} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mg(y_1 + y_2) \\
&= \frac{1}{2}ml^2 \left[\frac{1}{4}\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{4}\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2}I_{z'} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mg(y_1 + y_2) \\
&= \frac{1}{2}ml^2 \left[\frac{5}{4}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{4}\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{12}L^2 + \frac{m}{3}l^2 \right) (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mg(y_1 + y_2) \\
&= \frac{1}{2}ml^2 \left[\frac{5}{4}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{4}\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + \frac{1}{3} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \right] \\
&\quad + \frac{1}{24}mL^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mg(y_1 + y_2) \\
&= \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{19}{12}\dot{\theta}_1^2 + \frac{7}{12}\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) \\
&\quad + \frac{1}{24}mL^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mg \left(-\frac{1}{2}l \cos \theta_1 - l \left(\cos \theta_1 + \frac{1}{2} \cos \theta_2 \right) \right) \\
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}ml^2 \left[\frac{19}{12}\dot{\theta}_1^2 + \frac{7}{12}\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] + \frac{1}{24}mL^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgl \left(\frac{3}{2} \cos \theta_1 + \frac{1}{2} \cos \theta_2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} p_{\theta_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{1}{2}ml^2 \left[\frac{2 \times 19}{12}\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] + \frac{1}{24}mL^2 \times 2\dot{\theta}_1 \\ p_{\theta_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{1}{2}ml^2 \left[\frac{2 \times 7}{12}\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] + \frac{1}{24}mL^2 \times 2\dot{\theta}_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} p_{\theta_1} \\ p_{\theta_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}m \begin{bmatrix} \frac{19}{6}l^2 + \frac{1}{6}L^2 & l^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ l^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \frac{7}{6}l^2 + \frac{1}{6}L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{On pose } A = \begin{bmatrix} \frac{19}{6}l^2 + \frac{1}{6}L^2 & l^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ l^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \frac{7}{6}l^2 + \frac{1}{6}L^2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{19}{6}l^2 + \frac{1}{6}L^2\right)\left(\frac{7}{6}l^2 + \frac{1}{6}L^2\right) - l^4 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \begin{bmatrix} \frac{7}{6}l^2 + \frac{1}{6}L^2 & -l^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ -l^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \frac{19}{6}l^2 + \frac{1}{6}L^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta}_1 = \frac{1}{\frac{1}{2}m\left(\frac{19}{6}l^2 + \frac{1}{6}L^2\right)\left(\frac{7}{6}l^2 + \frac{1}{6}L^2\right) - l^4 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \left[\left(\frac{7}{6}l^2 + \frac{1}{6}L^2\right) p_{\theta_1} - l^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) p_{\theta_2} \right] \\ \dot{\theta}_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}m\left(\frac{19}{6}l^2 + \frac{1}{6}L^2\right)\left(\frac{7}{6}l^2 + \frac{1}{6}L^2\right) - l^4 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \left[-l^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) p_{\theta_1} + \left(\frac{19}{6}l^2 + \frac{1}{6}L^2\right) p_{\theta_2} \right] \end{cases}$$

On constate que les équations de ce système sont difficilement intégrables et non linéaires.

3 Partie pratique

3.1 Le montage

Maintenant que toutes les bases théoriques élémentaires sont posées, nous pouvons nous attaquer à l'étude de notre système couplé, le pendule double. Le détails des différentes versions de notre pendule est disponible dans la partie 4.

3.2 Traitement des données

Il nous faut tout d'abord les coordonnées des centres de masses de chaque membre de pendule ; puis calculer les angles θ_1 , θ_2 , et leurs dérivées par rapport au temps.

3.2.1 Methode d'acquisition informatique des données

Le logiciel GENERIS 5 + nous a permis d'obtenir les coordonnées des deux centres de masses.

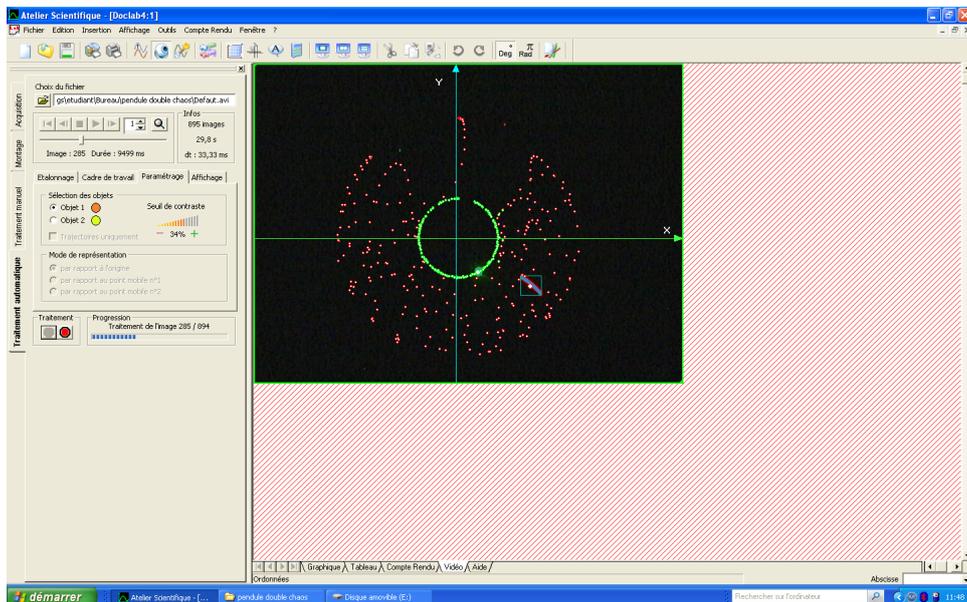


FIGURE 10 – Capture d'écran de GENERIS 5 + traitant les données d'une vidéo

Nous effectuons à chaque expérience l'acquisition de plus de 800 points, permettant d'avoir une grande flexibilité sur les mesures, car il existe toujours des perturbations : frottements affectant les oscillations.

3.2.2 Calcul des angles, et leurs dérivées

$$\begin{cases} x_1 = OM_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = OM_1 \cos \theta_1 \end{cases}$$

D'où $\sin \theta_1 = \frac{x_1}{OM_1}$

On voit graphiquement que d'après nos définitions $OM_1 = \frac{L}{2}$

$$\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 = \frac{2}{L} \dot{x}_1$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{2}{L \cos \theta_1} \dot{x}_1 = \frac{2}{L \frac{y_1}{OM_1}} \dot{x}_1 = \frac{2}{L y_1} \frac{L}{2} \dot{\theta}_1 = \frac{\dot{x}_1}{y_1}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM_2}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \overrightarrow{OM_2} \cdot \vec{e}_x = \overrightarrow{OI} \cdot \vec{e}_x + \overrightarrow{IM_2} \cdot \vec{e}_x \\ &= OI \cos(\overrightarrow{OI}, \vec{e}_x) + IM_2 \cos(\overrightarrow{IM_2}, \vec{e}_x) \\ &= L \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) + \frac{L}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_2\right) \end{aligned}$$

$$x_2 = L \sin \theta_1 - \frac{L}{2} \sin \theta_2$$

D'où

$$(x_2 - L \sin \theta_1) \frac{2}{L} = -\sin \theta_2$$

$$(L \sin \theta_1 - x_2) \frac{2}{L} = \sin \theta_2$$

$$\left(L \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \dot{x}_2\right) \frac{2}{L} = \dot{\theta}_2 \cos \theta_2$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{2}{L \cos \theta_2} \left(L \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \dot{x}_2\right) = \frac{2}{L \cos \theta_2} \left(L \dot{\theta}_1 \frac{y_1}{L} - \dot{x}_2\right) = \frac{2}{L \cos \theta_2} \left(L \frac{\dot{x}_1}{y_1} \frac{y_1}{L} - \dot{x}_2\right) = \frac{2}{L \cos \theta_2} (2\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

Or,

$$\begin{aligned} y_2 &= \overrightarrow{OM_2} \cdot \vec{e}_y = \overrightarrow{OI} \cdot \vec{e}_y + \overrightarrow{IM_2} \cdot \vec{e}_y \\ &= L \cos(\overrightarrow{OI}, \vec{e}_y) + IM_2 \cos(\overrightarrow{IM_2}, \vec{e}_y) \\ &= L \cos(\theta_1) + \frac{L}{2} \cos(\theta_2) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \cos \theta_2 = (y_2 - L \cos \theta_1) \frac{2}{L} = (y_2 - L \frac{2y_1}{L}) \frac{2}{L} = \frac{2}{L} (y_2 - 2y_1)$$

$$\text{On obtient finalement } \dot{\theta}_2 = \frac{2}{L} \frac{L}{2} \frac{1}{y_2 - 2y_1} (2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = \frac{2\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{y_2 - 2y_1}$$

3.3 Démarche expérimentale

Le protocole expérimental que nous avons mis au point est le suivant : le chaos repose entièrement sur les conditions initiales, si celles ci diffèrent de trop nous ne pourrions rien en tirer. On a donc utiliser un marqueur (règle) permettant de lancer dans la « même » position le pendule. On lance les deux barres parallèles, pendule inversé à 180° vers le haut, cela permet d'obtenir aisément le même départ et apporte suffisamment d'énergie pour obtenir beaucoup de points. On a aussi testé notre pendule sur les petites oscillations (30°), cela sera présenté en détail par la suite. L'analyse de tous les points obtenus avec générés nous permet d'obtenir en chaque instant les informations sur

les angles et les vitesses angulaires du pendule. En effet nous avons pour but de tracer un diagramme de phases, pour cela il convient de choisir nos variables. Généralement quand on parle de diagramme de phases, on trace position-vitesse. Mais dans notre cas l'angle à choisir (analogie avec la position) est primordial. En effet les deux angles sont a priori indépendants, en ce sens où la première barre du pendule peut osciller d'une même façon pour deux positions relatives de la seconde barre différentes. A fortiori il faut tracer notre diagramme en 3 dimensions pour espérer obtenir de bons attracteurs.

3.3.1 Cas de petites oscillations - Petits angles

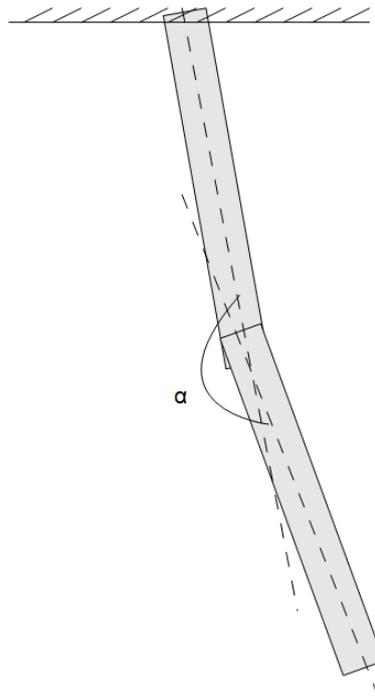


FIGURE 11 – Description géométrique de l'angle α

Cette première expérience nous apporte juste une étude sur le comportement du pendule double pour de faibles amplitudes, telles que α reste petit aussi. L'expérience nous montre clairement un comportement digne de celui d'un pendule simple, en effet analysons les variations temporelles de l'angle α , ainsi que le diagramme $\alpha-\dot{\alpha}$. On trouve aisément que $\alpha = \pi - \theta_1 - \theta_2$

La figure 12 nous montre bien un mouvement régulier, périodique amorti. Cette expérience nous permet aisément d'observer un taux d'amortissement important. L'ordre de grandeur du temps d'amortissement est de 18 secondes.

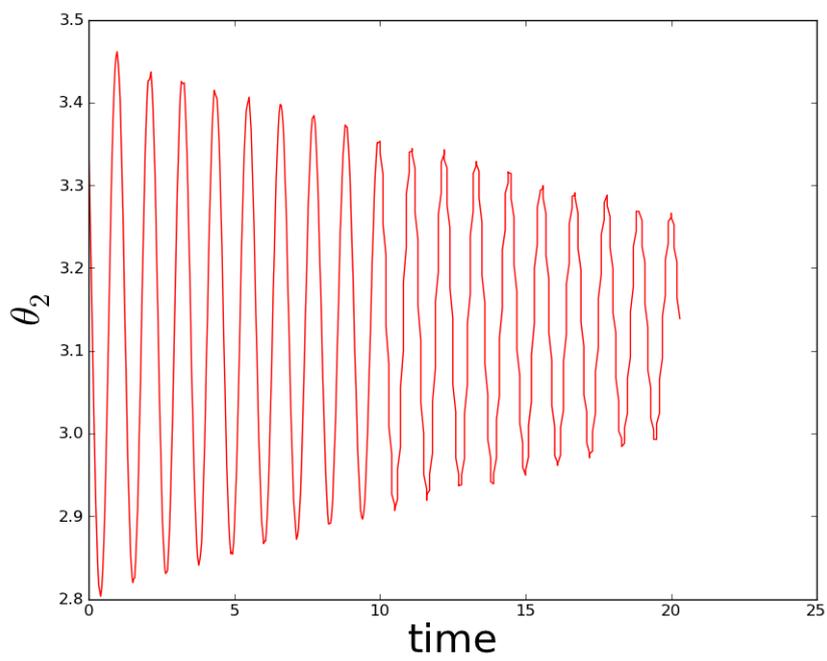


FIGURE 12 – θ_2 en fonction du temps

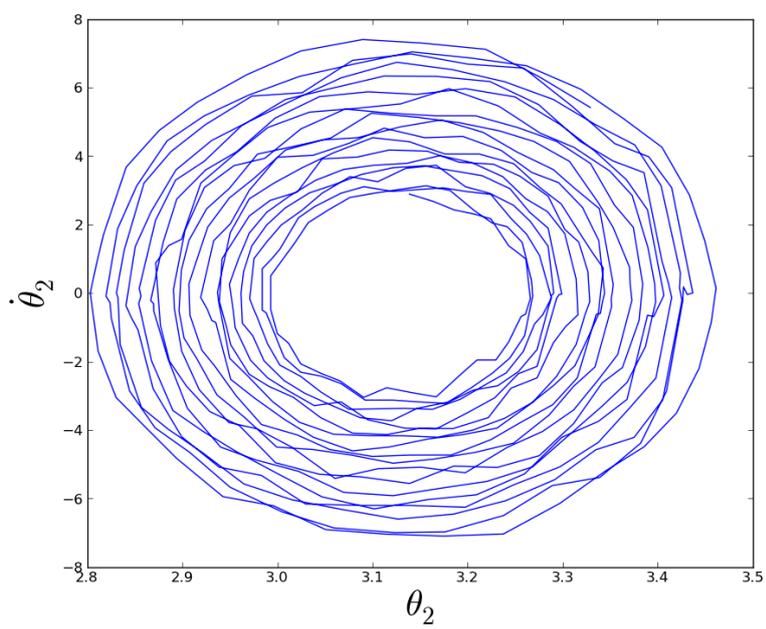


FIGURE 13 – $\dot{\theta}_2$ en fonction de θ_2

3.3.2 Grandes oscillations - Mouvement turbulent

Dans cette seconde expérience nous allons expérimenter l'étude du pendule double lancé à la verticale.



FIGURE 14 – Photo longue durée de notre pendule double

Qualitativement, cette image nous montre clairement un mouvement chaotique, la seconde barre décrit un nombre immense de trajectoires différentes. On peut donc se dire *a priori* que le pendule double décrit un système chaotique. Mais comme nous avons vu précédemment dans la partie concernant l'étude théorique, il n'est pas si aisé que cela d'obtenir un système physique purement chaotique. Il peut juste posséder une sensibilité aux conditions initiales et un grand nombre d'oscillations propres, sans relever du moindre caractère purement turbulent. C'est pourquoi nous avons, à l'aide de python et de ses modules scientifiques, tenté de tracer quelques courbes pour étudier plus en détails cela. Un problème que l'on peut d'ores et déjà relever : étant donné que notre système est dissipatif, le système n'est pas intrinsèquement invariant, il faudra donc aussi regarder d'un point de vue énergétique pour travailler sur des bandes d'énergie relativement constantes (cf : bifurcation vers le chaos). Les résultats obtenus nous permettront de discuter du caractère chaotique ou non du pendule double. Dix expériences ont été réalisées avec départ sans vitesse initiale, lâché à la verticale ($\alpha = \pi$ et barres vers le

haut).

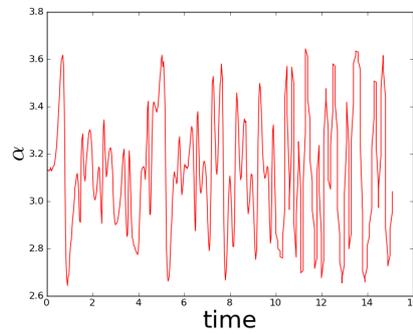


FIGURE 15 – α en fonction du temps

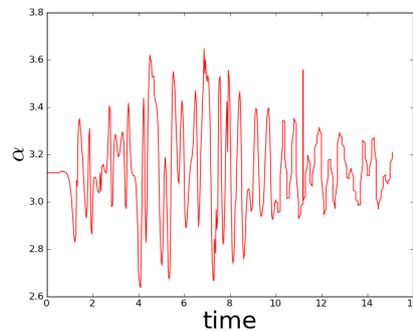


FIGURE 16 – α en fonction du temps

Interprétations de ces deux courbes : A $t = 0$, les deux α sont infiniment proches, dès les premières secondes on observe des digressions qui sur le long terme, nous donnent des mouvements complètement différents. L'angle α qui établit le lien entre θ_1 et θ_2 est très bien pour étudier le système dans son ensemble mais on peut aussi s'intéresser aux modes globaux de vibrations pour la seconde barre (qui reste la plus démonstrative). Nous allons maintenant passer à l'étude de quelques diagrammes de phase, et tenter d'obtenir un attracteur étrange. Premièrement durant nos expériences nous avons observé, en plus des mouvements complètement « hasardeux », deux modes intéressants à signaler :

- mouvement en phase des deux barres
- mouvement en opposition de phases

Pour mettre en évidence ce phénomène, nous avons choisi de tracer θ_1 en fonction de θ_2 , or nous savons que $\alpha = \pi - \theta_1 - \theta_2$ donc si

- phase : $\alpha = \pi = \pi - \theta_1 - \theta_2 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$
- opposition de phase : il faut que $\alpha = \frac{\pi}{2} = \pi - \theta_1 - \theta_2 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} = -\theta_1 - \theta_2 \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

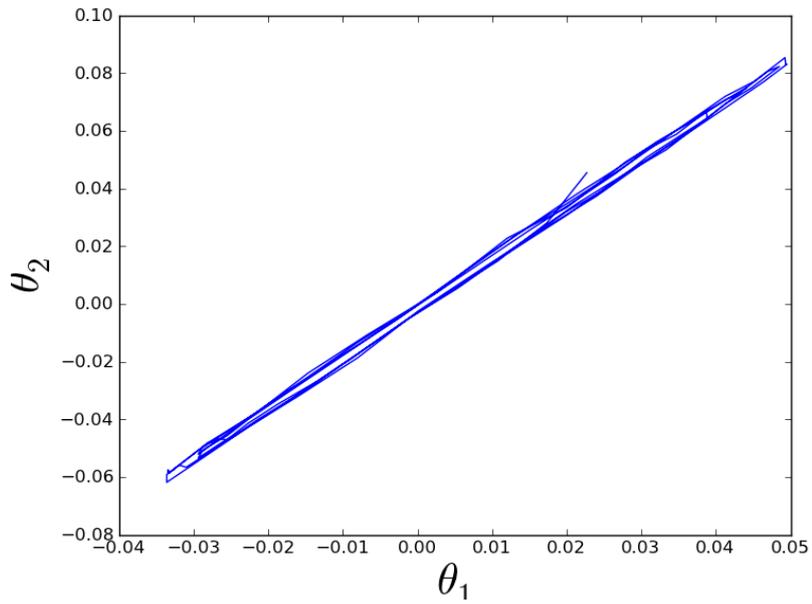


FIGURE 17 – Les deux barres du pendule sont en phase : $\theta_1 \simeq \theta_2$

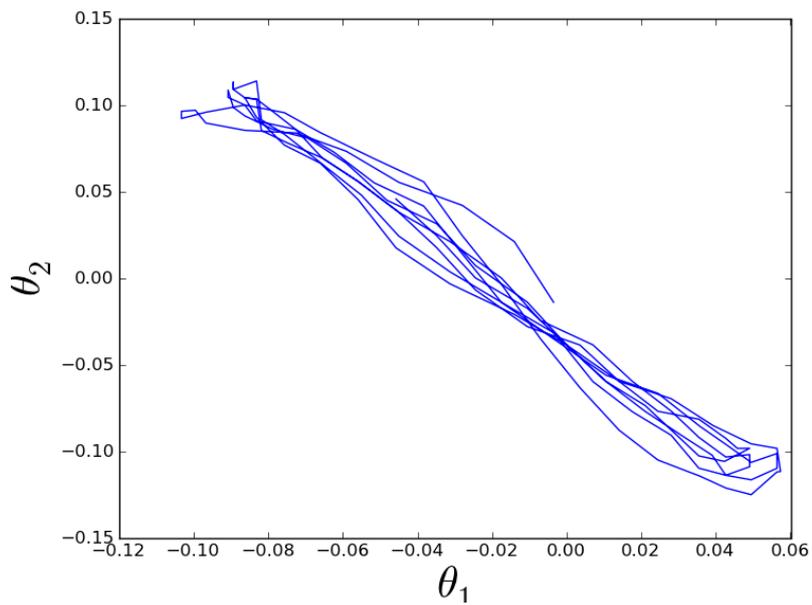


FIGURE 18 – Les deux barres du pendule sont en opposition de phase : $\theta_1 + \theta_2 \simeq \frac{\pi}{2}$

On remarque qu'en $\theta_1 = 0$, on n'obtient pas $\frac{\pi}{2}$ car dans notre programme de tracé

nous avons du appliquer un facteur multiplicatif pour lisser les courbes. L'allure générale est bien la droite attendue théoriquement. Cette dernière est moins précise, car les mouvements en opposition de phase ne peuvent pas réellement l'être continuellement sur une bande d'oscillations large.

Pour terminer, intéressons nous au cas extrême : le mouvement complètement « turbulent » du pendule, mis en image grâce à la figure 14. Il s'est avéré que c'est le cas le plus difficile à étudier, en effet les mouvements sont rapides, denses et notre système est fort dissipatif et donc il se meut sur des domaines d'énergie peu constants. Qualitativement, nous avons bien obtenu des oscillations chaotiques comme on le voit aisément sur les graphes 15 et 16. Cependant, comme nous le rappelons, le chaos possède plusieurs conditions nécessaires à son apparition. Pour nous assurer, il faut tracer le diagramme de phases de notre système. Sur tous les diagrammes que nous avons tracé nous avons n'avons jamais obtenu d'attracteurs étranges, tel celui de Lorenz. Nous avons cependant obtenu des courbes se rapprochant d'attracteurs toriques, ou encore d'attracteur de type point fixe. Notre système ne nous a pas permis de distinguer un attracteur étrange, il s'agit de la superposition de différents attracteurs de part la variation d'énergie durant le fonctionnement.

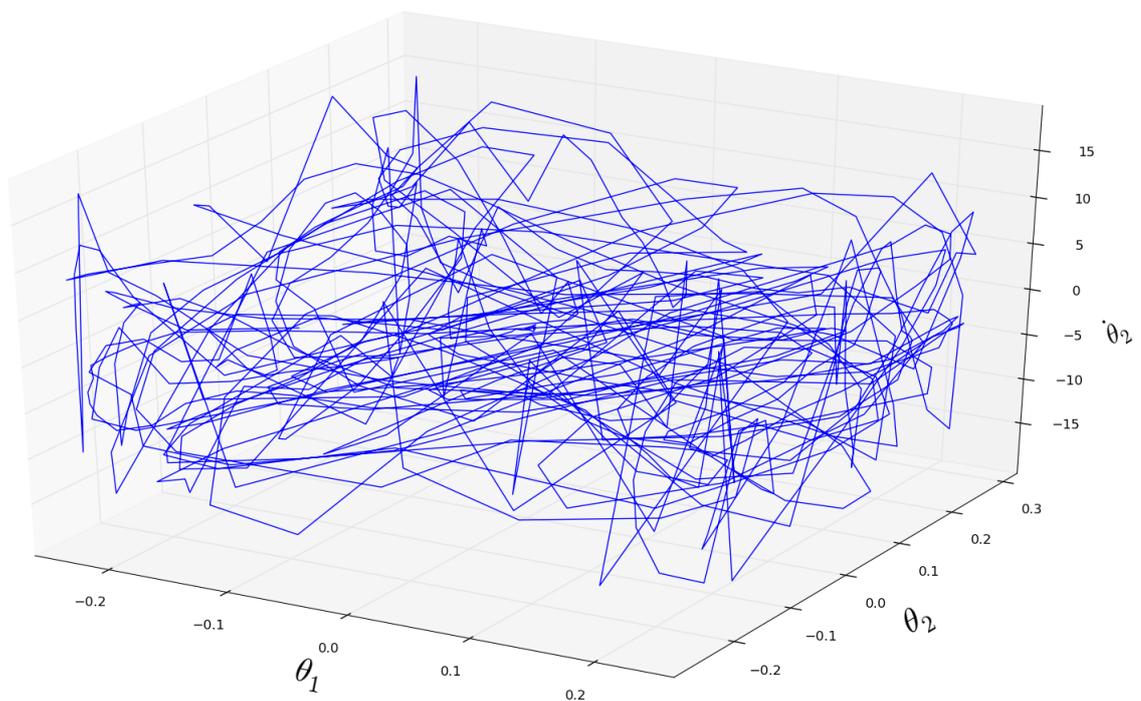


FIGURE 19 – Diagramme de phases pour une de nos expériences

4 Journal de bord

4.1 Vendredi 4 Février 2011

Première séance. Détermination de la problématique : *Quelles sont les caractéristiques élémentaires des mouvements chaotiques ?*

4.2 Vendredi 11 Février 2011

L'expérience est imaginée ; le protocole expérimental est abouti. Envoi des plans pour l'usinage du matériel.

4.3 Vendredi 18 Février 2011

Attente du matériel. Reflexion théorique.

4.4 Vendredi 11 Mars 2011

Matériel usiné. Petits essais. Notre pendule double est fonctionnel, les frottements sont négligeables grâce aux roulements à billes. Nous essayons d'obtenir des données informatiques, mais il faudra plus qu'un papier coloré adhésif sur le centre de masse pour marquer ses coordonnées. *Comment avoir de bonnes images à traiter via informatique ?*

4.5 Vendredi 18 Mars 2011

Après avoir tenté de repérer les centres de masses des barres avec du ruban adhésif coloré, puis d'avoir essayé avec un marqueur photoluminescent, nous sommes passés à l'étape supérieure : les diodes.

4.6 Vendredi 25 Mars 2011

Réalisation de la première expérience officiellement fonctionnelle avec enregistrement des résultats. *Comment traiter ces données efficacement ?*

4.7 Vendredi 1 Avril

Enregistrements de 3 expériences, avec les mêmes conditions initiales. Traitement des données.

4.8 Vendredi 8 Avril

Pour limiter au maximum les frottements, nous avons enduits les roulements à billes de lubrifiant. Puis nous avons fait d'autres lancers, toujours avec des conditions initiales quasi-identiques.

4.9 Vendredi 15 Avril

Dernière séance. Notre pendule est à son apogée. Nous avons suffisamment de données avec le lancé « à la verticale », nous essayons donc d'autres lancements du genre « aux petits angles ». En fin de séance, nettoyage de la paillasse, rangement du matériel, démontage du pendule ...

5 Conclusion

Les différentes expériences que nous avons menées nous ont conduit à apercevoir que le pendule double a plusieurs modes de fonctionnement. Il peut se comporter comme un pendule simple aux basses énergies, ou bien se comporter de manière fort « chaotique ». Il est sans équivoque sensible aux conditions initiales. Cependant on sait très bien qu'il n'existe pas d'équivalence entre chaos et sensibilité aux conditions initiales, le chaos implique cette sensibilité mais l'inverse n'est pas systématique. En ce sens nous avons réussi à montrer qu'il est indéniable que le pendule double possède des caractéristiques dignes de tout système chaotique. Cependant l'apparente impossibilité de trouver un attracteur étrange, ne nous permet pas d'assurer que le pendule double est purement chaotique. Rappelons que dans L'ordre dans le chaos, les auteurs précisent que deux degrés de liberté ne peuvent pas donner un système complètement chaotique.

6 Remerciements

Nous tenons à remercier nos enseignants qui nous ont encadrés durant ces quelques mois, et plus particulièrement Franck Béclin pour son savoir et son savoir-faire. Nous remercions également le personnel de Lille 1 qui nous a encadrés, soutenus et aidés, notamment Tony et Hervé.

7 Bibliographie

Livres :

- L'ordre dans le chaos, Pommeau, Berger, Vidal
- Mécanique, Fondements et applications, Pérez

Sites Web :

- <http://www.al.lu/chemistry/stuff1/DL1/chaos.pdf>
- <http://just.loic.free.fr/>
- <http://www.apsq.org/sautquantique/telechargement/chaos.pdf>
- <http://www.julienalort.org/Scolarité/ChaosPhysique/Chaos.php>
- [http://pascale.et.vincent.bourges.pagesperso-orange.fr/fractales et chaos1/Chapitre 5.htm](http://pascale.et.vincent.bourges.pagesperso-orange.fr/fractales%20et%20chaos1/Chapitre%205.htm)
- [http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_du_chaos](http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_du_chaos)
- <http://fr.wikipedia.org/wiki/Attracteur>
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Attracteur_de_Lorenz
- [http://fr.wikipedia.org/wiki/Stabilité_de_Lyapunov](http://fr.wikipedia.org/wiki/Stabilit%C3%A9_de_Lyapunov)

- http://fr.wikipedia.org/wiki/Sensibilit%C3%A9_aux_conditions_initiales
- <http://forums.futura-sciences.com/physique/>

Rencontres : Discussions sur le chaos et les systèmes non-linéaires avec Stéphane Randoux, Maître de conférence à l'Université de Lille 1